Probleme pentru clasa a X-a sau a IX-a

Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} \sqrt{x+1}-\sqrt{y}=\sqrt[3]{y+1}-\sqrt[3]{x+2} \\ x-y+y^2-x^2=2 \end{cases}$$

Constantin Rusu

Soluție Considerăm funcția $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ dată prin $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+2}$, observăm că funcția f este strict crescătoare deoarece este suma a două funcții strict crescătoare $\Rightarrow f$ este injectivă.

Prima ecuație se scrie astfel: $f(x)=f(y-1)\Rightarrow x=y-1$

și sistemul dat este echivalent cu

$$\begin{cases} x=y-1 \\ x+y+y^2-x^2=2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=y-1 \\ 2y=4 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Barem:

- Obținerea funcției f ---- 2 puncte
- f este injectivă ---- 2 puncte
- $f(x)=f(y-1)\Rightarrow x=y-1$ ---- 2 puncte
- Rezolvarea sistemului 1 punct

Total 7 puncte.